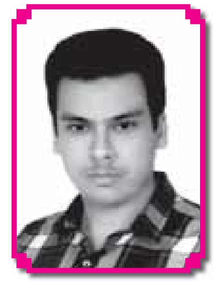
کیوان عباس‌زاده اسک شهری، دانشجوی کارشناسی ارشد
دانشگاه صنعتی شریف



شمارش با استفاده از کدگذاری!

مقدمه

یکی از مسائل مطرح در مجموعه‌ها، شمارش تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه است. مسئله از این قرار است که یک مجموعهٔ n عضوی دارای چند زیرمجموعه اسـت. یعنی اگـر: $S=\{۱,۲,...,n\}$، آن‌گاه S دارای چند زیرمجموعه اسـت؟ روش‌های متفاوتی برای پاسخ دادن به این سـؤال وجود دارد، اما یکی از زیباترین روش‌ها برای پاسـخ به این سـؤال استفاده از روش کدگذاری روی زیرمجموعه‌هاست. فرض کنید: $A\subseteq S$، حال می‌توان به مجموعهٔ A یک کد n رقمی $a_۱a_۲...a_n$ از ارقام ۱ و ۰ نسبت داد، به‌طوری که برای هر $i=۱,۲,...,n$ داریم:

$$a_i=\begin{cases}۱ & i\in A\\ ۰ & i\in A^c\end{cases} \qquad (۱)$$

و برعکـس، بـه هر کـد n رقمـی از ارقـام ۱ و ۰ می‌توان یک زیرمجموعه از مجموعهٔ S را نسبت داد. به این صورت که فرض کنید $a_۱a_۲...a_n$ یک کد n رقمی از ارقام ۱ و ۰ است. حال می‌توان به آن مجموعهٔ $A=\{i|a_i=۱\}$ را نسـبت داد که زیرمجموعه‌ای از S اسـت. بنابراین یک تناظر یک‌به‌یک بین گردایهٔ زیرمجموعه‌های مجموعه n عضـوی S و گردایهٔ کدهای n رقمـی از ارقام ۱ و ۰ وجود دارد. پس تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ S برابر است با تعداد کدهای n رقمی از ارقام ۱ و ۰ که تعدادشان طبق اصل ضرب برابر است با:

$$\underbrace{۲\times۲\times...\times۲}_{n}=۲^n$$

حال می‌توان سؤالات متعددی در رابطه با تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه مطرح کرد.

برای مثال:

۱. چنـد دوتایـی مرتـب (A,B) از زیرمجموعه‌هـای مجموعهٔ $S=\{۱,۲,...,n\}$ وجود دارد، به‌طوری که: $A\cup B=S$.

۲. چنـد سـه‌تایی (A,B,C) از زیرمجموعه‌هـای مجموعـهٔ $S=\{۱,۲,...,n\}$ وجود دارد، به‌طوری که: $C\subseteq A\cup B$.

۳. چندسـه‌تایی (A,B,C) از زیرمجموعه‌هـای مجموعـه $S=\{۱,۲,...,n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که: $A\subseteq B\subseteq C$.

برای پاسـخ به این سؤالات می‌توان از روش کدگذاری که در بالا گفته شـد، اسـتفاده کرد. اما چگونه؟ در این مقالهٔ کوتاه قرار است با پاسخ به سه سؤال مطرح شده به این مطلب پرداخته شود.

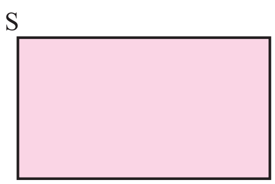
پاسخ سؤال‌ها

۱. چنـد دوتایـی مرتـب (A,B) از زیرمجموعه‌هـای مجموعهٔ $S=\{۱,۲,...,n\}$ وجود دارد، به‌طوری‌که: $A\cup B=S$.

حل: فرض کنید (A,B) یـک دوتایی مرتب از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $S=\{۱,۲,...,n\}$ است و داریم: $A\cup B=S$. حال به این دوتایی مرتب می‌توان کد n رقمی $a_۱a_۲...a_n$ را از ارقام ۰، ۱و ۲ نسبت داد، به‌طوری‌که برای هر $i=۱,۲,...,n$ داریم:

$$a_i=\begin{cases}۰ & i\in A-B\\ ۱ & i\in A\cap B\\ ۲ & i\in B-A\end{cases} \qquad (۲)$$

امـا اندکی تأمل کنیم. سـؤال این اسـت که چگونـه کد بالا را سـاخته‌ایم؟! بـرای پاسـخ به این سـؤال از «نمـودار ون» اسـتفاده می‌کنیم. مجموعهٔ S را با مستطیل نمایش می‌دهیم، یعنی فرض کنید مستطیل مقابل، مجموعهٔ S است:



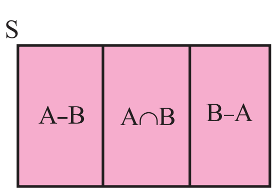
حال دوتایـی (A,B) از زیرمجموعه‌های مجموعـهٔ S را در نظر بگیرید، با این فرض که: $A\cup B=S$. مسـتطیل بالا را می‌توان به سـه ناحیـه افراز کرد، به‌گونـه‌ای که یک ناحیه شـامل اعضای مجموعهٔ A−B، یک ناحیه شـامل اعضای مجموعهٔ B−A و یک ناحیه شـامل اعضای $A\cap B$ باشد. زیرا به ازای هر $x\in S$ سه حالت داریم:

حالت ۱. $x\in A$ و $x\notin B$ که در این صورت: $x\in A-B$.

حالت ۲. $x\in B$ و $x\notin A$ که در این صورت: $x\in B-A$.

حالت ۳. $x\in A$ و $x\in B$ که در این صورت: $x\in A\cap B$.

به شکل زیر توجه کنید:



حال به ازای هر $i=۱,۲,...,n$، بسته به اینکه i متعلق به کدام‌یک از ناحیه‌هـای بالا باشـد، به رقـم nام کد، یکی از ارقـام ۰، ۱ و ۲ را نسـبت می‌دهیم. در واقع اگر $i\in A-B$ آن‌گاه قـرار می‌دهیم: $a_i=۰$، اگر $i\in A\cap B$، آن‌گاه قرار می‌دهیم: $a_i=۱$، و اگر $i\in B-A$، آن‌گاه قرار می‌دهیـم: $a_i=۲$. به ایـن ترتیب به یک کد n رقمی از ارقام ۰، ۱ و ۲ می‌رسیم. برعکس به هر کد n رقمی از ارقام ۰، ۱ و ۲ می‌توان دوتایی مرتب (A,B) از زیرمجموعه‌های S را نسـبت داد که: $A\cup B=S$. به این صورت که فرض کنید $a_۱,a_۲,...,a_n$ یک کد n رقمی از ارقام ۰، ۱ و ۲ است. قرار می‌دهیم:

$A_۰=\{i|a_i=۰\}$

$A_۱=\{i|a_i=۱\}$

$A_۲=\{i|a_i=۲\}$

حال تعریف کنید: $A=A_۰\cup A_۱$ و $B=A_۱\cup A_۲$. واضح اسـت که A و B زیرمجموعهٔ S هسـتند و داریـم: $A\cup B=S$. پس یک تناظر یک‌به‌یـک بین گردایهٔ دوتایی‌هـای (A,B) از زیرمجموعه‌های S که $A\cup B=S$ و گردایـهٔ کدهای n رقمی از ارقـام ۰، ۱ و ۲ وجود دارد. پـس تعداد دوتایی‌هـای (A,B) از زیرمجموعه‌هـای مجموعهٔ S که $A\cup B=S$، برابر اسـت با تعداد کدهای n رقمی با ارقام ۰، ۱ و ۲ که تعدادشان طبق اصل ضرب برابر است با:

$$\underbrace{۳\times۳\times...\times۳}_{n}=۳^n$$

۲. چند سـه‌تایی مرتـب (A,B,C) از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $S=\{۱,۲,...,n\}$ وجود دارد، به‌طوری که: $A\cup B\subseteq C$.

حل: فرض کنید (A,B,C) یک سه‌تایی مرتب از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $S=\{۱,۲,...,n\}$ است، به‌طوری که: $A\cup B\subseteq C$. حال به این سـه‌تایی مرتب می‌توان کد n رقمی $a_۱,a_۲,...,a_n$ از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ را نسبت داد، به‌طوری که برای هر $i=۱,۲,...,n$ داریم:

$$a_i=\begin{cases}۰ & i\in A-B\\ ۱ & i\in A\cap B\\ ۲ & i\in B-A\\ ۳ & i\in C-(A\cup B)\\ ۴ & i\in S-C\end{cases} \qquad (۳)$$

در واقع مجموع S را با یک مسـتطیل نمایش می‌دهیم. حال با توجه به اینکه $A\cup B\subseteq C$، به ازای هر $x\in S$ پنج حالت داریم:

حالت ۱. $x\in A$ و $x\notin B$ که در این صورت: $x\in A-B$.

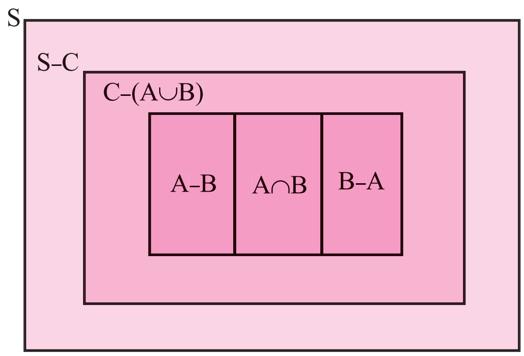
حالت ۲. $x\in B$ و $x\notin A$ که در این صورت: $x\in B-A$.

حالت ۳. $x\in A$ و $x\in B$ که در این صورت: $x\in A\cap B$.

حالت ۴. $x\notin A$، $x\notin B$ و $x\in C$. در این صورت: $x\in C-(A\cup B)$.

حالت ۵. $x\notin C$. در این صورت: $x\in S-C$.

پس می‌توان مسـتطیل S را همانند شـکل زیر بـه پنج ناحیه افراز کرد. توجه کنیم که در شـکل سـه مسـتطیل افقی وجود دارد که مسـتطیل بزرگ‌تر نشـان‌دهندهٔ مجموعهٔ S و مسـتطیل میانی نشـان‌دهندهٔ مجموعهٔ C و مستطیل کوچک‌تر نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ $A\cup B$ اسـت. همچنین، سه مسـتطیل عمودی کوچک که نمایانگر مجموعه‌های A−B و B−A و $A\cap B$ هستند.



حـال به ازای هر $i=۱,۲,...,n$، بسـته به اینکـه i در کدام‌یک از ناحیه‌های بالا قرار می‌گیرد، به رقم nام کد یکی از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ را نسـبت می‌دهیم. در واقع اگـر $i\in A-B$ آن‌گاه قرار می‌دهیم: $a_i=۰$، اگـر $i\in A\cap B$ آن‌گاه قرار می‌دهیم: $a_i=۱$، اگر $i\in B-A$ آن‌گاه قرار می‌دهیم: $a_i=۲$، اگـر $i\in C-(A\cup B)$ آن‌گاه قرار می‌دهیم $a_i=۳$، و اگـر $i\in S-C$ آن‌گاه قرار می‌دهیـم: $a_i=۴$. به این ترتیب به یک کد n رقمی از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌رسیم. حال برعکس، فرض کنید $a_۱,a_۲,..., a_n$ یک کد n رقمی از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ است. قرار دهید:

$A_۰=\{i|a_i=۰\}$

$A_۱=\{i|a_i=۱\}$

$A_۲=\{i|a_i=۲\}$

$A_۳=\{i|a_i=۳\}$

اکنـون تعریـف کنیـد: $A=A_۰\cup A_۱$، $B=A_۱\cup A_۲$ و $C=A_۰\cup A_۱\cup A_۲\cup A_۳$. واضح اسـت کـه A، B و C زیرمجموعهٔ S هسـتند و داریم: $A\cup B\subseteq C$. پس یک تناظـر یک‌به‌یک بین گردایهٔ سـه‌تایی‌های (A,B,C) از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $S=\{۱,۲,...,n\}$ که $A\cup B\subseteq C$ و گردایهٔ کدهای n رقمی از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ وجود دارد. پس تعداد این سه‌تایی‌ها برابر است با تعداد کدهای n رقمی از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ که طبق اصل ضرب برابر است با:

$$\underbrace{۵\times۵\times...\times۵}_{n}=۵^n$$

با استفاده از این روش می‌توانید به سؤال سوم نیز پاسخ دهید و جواب آن ۴^n است.